



TITLE:

# 標数5の超特殊K3曲面上有理曲線について

AUTHOR(S):

桂, 利行

---

CITATION:

桂, 利行. 標数5の超特殊K3曲面上有理曲線について. 代数幾何学シンポジウム記録 2013, 2013: 15-24

ISSUE DATE:

2013

URL:

<http://hdl.handle.net/2433/215003>

RIGHT:

## 標数5の超特殊K3曲面上有理曲線について

法政大学理工学部 桂 利行

### 1 序

$p$  を素数,  $n$  を自然数として,  $q = p^n$  とおく. 有限体  $\mathbf{F}_q$  上の射影平面  $\mathbf{P}^2(\mathbf{F}_q)$  の  $\mathbf{F}_q$ -有理点の集合を  $\mathcal{A}$ ,  $\mathbf{F}_q$  上定義された射影直線の集合を  $\mathcal{B}$  とすれば,  $\mathcal{A}$ ,  $\mathcal{B}$  それぞれは  $q^2 + q + 1$  個の元からなる. 直線  $\ell \in \mathcal{A}$  上には  $\mathcal{B}$  の  $q + 1$  個の点が存在し, 逆に, 点  $P \in \mathcal{B}$  をとおる  $\mathcal{A}$  の直線が  $q + 1$  個存在する. このような関係を, 集合  $\mathcal{A}, \mathcal{B}$  は  $(q^2 + q + 1)_{q+1}$ -configuration をなすという (cf. Dolgachev [4]).

次に, 代数的閉体  $k$  の標数を 2 でないとし,  $k$  上の種数 2 の非特異完備代数曲線を  $C$ , その Jacobi 多様体を  $J(C)$  とする.  $C \subset J(C)$  において,  $C$  は  $J(C)$  の involution  $\iota$  で不変としてよい.  $J(C)_2$  を 2 等分点のなす群とし,  $T = \{T_a(C) \mid a \in J(C)_2\}$  とおく. 商空間  $J(C)/\iota$  の 16 個の有理特異点を解消してできる Kummer 曲面  $Km(J(C))$  上に,  $T$  から得られる 16 個の非特異有理曲線の集合を  $\mathcal{A}$ , 特異点解消から得られる 16 個の例外曲線の集合を  $\mathcal{B}$  とすれば,  $\mathcal{A}, \mathcal{B}$  それぞれの有理曲線は互いに交わらない. 一方,  $\ell \in \mathcal{A}$  は  $\mathcal{B}$  の丁度 6 個の有理曲線と交わり,  $\ell \in \mathcal{B}$  も  $\mathcal{A}$  の丁度 6 個の有理曲線と交わる. このような関係も, 集合  $\mathcal{A}, \mathcal{B}$  は  $(16_6)$ -configuration をなすという (cf. Dolgachev [4]).

我々は, K3 曲面上の非特異有理曲線の配置を考える. K3 曲面  $X$  は, Picard 数が 22 のとき超特異であると言われる. このような K3 曲面は, 定義体の標数が正の時のみ存在する.  $S$  が超特異ならば, その Néron-Severi 群  $\text{NS}(X)$  はランク 22 の格子であるが, その discriminant は  $-p^{2\sigma}$  の形をしていることが M. Artin によって示されており,  $\sigma$  は Artin 不変量と呼ばれている. 超特異 K3 曲面  $X$  の Artin 不変量が 1 のとき,  $X$  を超特殊 K3 曲面という. 標数  $p = 2$  においては, 超特殊 K3 曲面上には非特異有理曲線のなす  $(21_5)$ -configuration が存在することが知られており (cf. Dolgachev-Kondo [5], Katsura-Kondo [7], Shimada [10]),  $p = 3$  の場合には,  $(16_{10})$ -configuration が存在することなどが示されている (cf. Katsura-Kondo [8], 複素数体上では Barth-Nieto [1], Traynard [12] 参照).

本稿では, 標数 5 において, Artin 不変量が 1 の超特異 K3 曲面上にある非特異有理曲線の配置を調べ, いくつかの美しい対称性を持った配置が存在し,

それが格子理論と関係していることを示す。この研究は、金銅誠之、島田伊知朗両氏との共同研究である（詳細は [9] 参照）。

## 2 超特殊アーベル曲面

$k$  を標数  $p > 0$  の代数的閉体,  $E$  を  $k$  上の超特異楕円曲線とする。  $E$  の零点を  $P_\infty$  とし, アーベル曲面  $A = E \times E$  を考える。  $A$  の Néron-Severi 群を  $\text{NS}(A)$  とし,  $A$  の主偏極  $Y = E \times \{P_\infty\} + \{P_\infty\} \times E$  をとる。  $\mathcal{O} = \text{End}(E)$ ,  $B = \text{End}(E) \otimes \mathbf{Q}$  とおけば,  $B$  が discriminant  $p$  の有理数体  $\mathbf{Q}$  上の quaternion division algebra になり,  $\mathcal{O}$  がその maximal order になることはよく知られている。  $a \in B$  の canonical involution を  $\bar{a}$  とかく。  $A$  上の因子  $L$  に対し

$$\begin{aligned} \varphi_L: A &\longrightarrow \text{Pic}^0(A) \\ x &\longmapsto T_x^* L - L, \end{aligned}$$

なる準同型写像を得る。ここに,  $T_x$  は点  $x \in A$  による translation である。

$$H = \left\{ \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{pmatrix} \mid \alpha, \delta \in \mathbf{Z}, \beta, \gamma \in \mathcal{O}, \gamma = \bar{\beta} \right\}.$$

とおく。  $H$  は  $M_2(\mathcal{O}) \cong \text{End}(A)$  の部分群になり, 次の定理が成り立つ (たとえば, [6] 参照)。

**定理 2.1.** 加群の準同型写像

$$\begin{aligned} j: \text{NS}(A) &\longrightarrow H \\ L &\longmapsto \varphi_Y^{-1} \circ \varphi_L \end{aligned}$$

は, 全単射であり

$$j(E \times \{P_\infty\}) = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad j(\{P_\infty\} \times E) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

となる。  $L_1, L_2 \in \text{NS}(A)$  に対し

$$j(L_1) = \begin{pmatrix} \alpha_1 & \beta_1 \\ \gamma_1 & \delta_1 \end{pmatrix}, \quad j(L_2) = \begin{pmatrix} \alpha_2 & \beta_2 \\ \gamma_2 & \delta_2 \end{pmatrix},$$

とおけば, 交点数は

$$(L_1, L_2) = \alpha_1 \delta_2 + \alpha_2 \delta_1 - \gamma_1 \beta_2 - \gamma_2 \beta_1.$$

で与えられる。

$m : E \times E \rightarrow E$  を  $E$  の加法とし,

$$\Delta = \text{Ker } m.$$

とおけば  $\Delta = \{(P, -P) \mid P \in E\}$  である. 2 つの自己準同型写像  $a_1, a_2 \in \mathcal{O} = \text{End}(E)$  に対し

$$\Delta_{a_1, a_2} = (a_1 \times a_2)^* \Delta.$$

とおく. とくに,  $\Delta = \Delta_{1,1}$  である. このとき, 次が成り立つ (cf. [6]).

**定理 2.2.**

$$j(\Delta_{a_1, a_2}) = \begin{pmatrix} \bar{a}_1 a_1 & \bar{a}_1 a_2 \\ \bar{a}_2 a_1 & \bar{a}_2 a_2 \end{pmatrix}$$

$E$  の自己準同型写像  $g \in \text{End}(E)$  のグラフを  $\Phi_g$  とかく. ここで,  $A = E \times E$  上の代数曲線と  $\Phi_g$  の交点数を計算する公式を求める.  $C$  を種数  $g \geq 1$  の非特異代数曲線,

$$\eta_i : C \longrightarrow E \quad (i = 1, 2)$$

を finite morphisms とし

$$\eta = (\eta_1, \eta_2) : C \longrightarrow E \times E = A.$$

なる写像を考える.  $\eta$  の像を  $\Gamma[\eta]$  と書く.  $\eta$  が  $C$  から  $\Gamma[\eta]$  への双有理写像とすると

$$(\Gamma[\eta], E \times \{P_\infty\}) = \deg \eta_2, \quad (\Gamma[\eta], \{P_\infty\} \times E) = \deg \eta_1. \quad (1)$$

である. 加法  $m : E \times E \longrightarrow E$  から因子  $\Delta = \text{Ker } m = \{(P, -P) \mid P \in E\}$  を得るが, isogeny  $g \in \text{End}(E)$  に対し  $\Phi_g = ((-g) \times \text{id})^* \Delta$  となる. 合成写像

$$\theta : C \xrightarrow{\eta} E \times E \xrightarrow{(-g) \times \text{id}} E \times E \xrightarrow{m} E.$$

を考えれば,  $\Gamma[\eta]$  と  $\Phi_g$  の交点数は次で与えられる:

**命題 2.3.**  $\eta$  が  $C$  から  $\Gamma[\eta]$  への双有理写像であるとする. このとき,  $(\Gamma[\eta], \Phi_g) = \deg \theta$  となる.

*Proof.*

$$\begin{aligned} (\Gamma[\eta], \Phi_g) &= \deg \eta^* \Phi_g = \deg(\eta^* \circ ((-g) \times \text{id})^* \Delta) \\ &= \deg(\eta^* \circ ((-g) \times \text{id})^* \circ m^{-1}(P_\infty)) \\ &= \deg((m \circ ((-g) \times \text{id}) \circ \eta)^*(P_\infty)). \\ &= \deg \theta. \end{aligned}$$

□

### 3 標数5の楕円曲線

$k$  を標数5の代数的閉体とすれば,  $k$  上の超特異楕円曲線は, 同型を除いてただ1つ存在し,

$$y^2 = x^3 - 1.$$

で与えられる.  $E$  をその非特異完備モデルとする. アフィンモデルで  $E$  上の2点  $(x_1, y_1)(x_2, y_2)$  の加法は

$$\begin{aligned} x &= -x_1 - x_2 + \frac{(y_2 - y_1)^2}{(x_2 - x_1)^2}, \\ y &= y_1 + y_2 - \frac{(y_2 - y_1)^3}{(x_2 - x_1)^3} + \frac{3(x_2 y_1 - x_1 y_2)}{(x_1 - x_2)}. \end{aligned} \quad (2)$$

で与えられ, 2倍写像  $[2]_E$  は

$$x = x_1 + 1/y_1^2, \quad y = 2y_1 - 1/y_1 + 1/y_1^3$$

で与えられる.  $\omega = 2 + 3\sqrt{2}$  とおけば,  $\omega$  は1の原始3乗根であり, 2等分点は

$$P_\infty = (0, \infty), P_0 = (1, 0), P_1 = (\omega, 0), P_2 = (\omega^2, 0).$$

で与えられる. ここに,  $P_\infty$  は  $E$  の零点である. 2等分点  $P_0$  による translation  $T_{P_0}$  は

$$T_{P_0}^*(x) = \frac{x+2}{x-1}, \quad T_{P_0}^*(y) = \frac{2y}{(x-1)^2}.$$

で与えられる.

$$u = 2(x + T_{P_0}^*(x) - 1), \quad v = 2\sqrt{2}(y + T_{P_0}^*(y)).$$

とおけば,  $u, v$  は  $T_{P_0}^*$  不変であり,  $u$  は  $v$  は方程式  $v^2 = u^3 - 1$  を満たす. したがって,

$$u = \frac{2x^2 + 3x + 1}{(x-1)}, \quad v = \frac{2\sqrt{2}y(x^2 + 3x + 3)}{(x-1)^2}.$$

は商写像

$$\begin{aligned} \phi_{E,2}: \quad E &\longrightarrow E \\ (x, y) &\mapsto (u, v). \end{aligned}$$

を与える. 直接計算によって

$$\phi_{E,2}^2 = -[2]_E.$$

となる.  $E$  は自己同型  $\gamma: \gamma: x \mapsto \omega x, y \mapsto -y$  を持ち,  $\gamma^6 = \text{id}$  となる. ここに,  $\text{id}$  は  $E$  の恒等写像である.  $B = \text{End}^0(E) = \text{End}(E) \otimes_{\mathbf{Z}} \mathbf{Q}$  は discriminant 5 の division algebra であり,  $\mathcal{O} = \text{End}(E)$  はその maximal order で, その  $\mathbf{Z}$  上の基底は

$$\omega_1 = 1, \omega_2 = \gamma, \omega_3 = \phi_{E,2}, \omega_4 = \gamma\phi_{E,2}.$$

で与えられる.  $A = E \times E$  上の因子

$$B_1 = E \times \{P_\infty\}, \quad B_2 = \{P_\infty\} \times E, \quad B_3 = (-\text{id} \times \text{id})^* \Delta, \quad B_4 = (-\gamma \times \text{id})^* \Delta, \\ B_5 = (-\phi_{E,2} \times \text{id})^* \Delta, \quad B_6 = (-\gamma \phi_{E,2} \times \text{id})^* \Delta$$

を考える. 第2章の定理を用いれば

$$j(B_1) = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad j(B_2) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad j(B_3) = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}, \\ j(B_4) = \begin{pmatrix} 1 & -\gamma^5 \\ -\gamma & 1 \end{pmatrix}, \quad j(B_5) = \begin{pmatrix} 2 & \phi_{E,2} \\ -\phi_{E,2} & 1 \end{pmatrix}, \\ j(B_6) = \begin{pmatrix} 2 & -\phi_{E,2}\gamma^2 \\ -\gamma\phi_{E,2} & 1 \end{pmatrix}.$$

となる. ここに,  $\mathcal{O} = \text{End}(E)$  の元として,  $\text{id}$  を 1, inversion  $\iota_E$  を  $-1$  と書く.

**定理 3.1.** *Néron-Severi* 群  $\text{NS}(A)$  の基底は,  $B_1, B_2, B_3, B_4, B_5, B_6$  で与えられる.

Néron-Severi 群  $\text{NS}(A)$  の基底  $B_1, B_2, B_3, B_4, B_5, B_6$  に関する Gram 行列は

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 & 2 & 2 \\ 1 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 & 3 & 4 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 3 & 2 & 0 & 2 \\ 2 & 1 & 4 & 3 & 2 & 0 \end{bmatrix}. \quad (3)$$

であり, その行列式は  $-5^2$  である.

## 4 超特殊 K3 曲面上の有理曲線の配置

以上の考察に基づいて, 主定理を簡潔に述べる.  $k$  を標数 5 の代数的閉体,  $E$  を前節に与えられた  $k$  上の超特異楕円曲線とする. アーベル曲面  $A = E \times E$  を考え,  $\iota$  をその involution,  $A/\iota$  を商曲面とする.  $A/\iota$  の 16 個の有理特異点を解消して得られる kummer 曲面を  $Km(A)$  と記せば,  $Km(A)$  は, 同型を除いて  $k$  上の唯一の超特殊 K3 曲面である.

$Km(A)$  の上に 96 本の非特異有理曲線を構成するために, 種数 2 の代数曲線

$$F : v^2 = u^6 - 1$$

と, 種数 5 の代数曲線

$$G : v^2 = \sqrt{2}(u^{12} + 2u^8 + 2u^4 + 1),$$

を考え, 正則写像

$$\begin{aligned}
\phi_{E,2} : E &\rightarrow E & (u, v) &\mapsto \left( \frac{2u^2 + 3u + 1}{u - 1}, \frac{2\sqrt{2}v(u^2 + 3u + 3)}{(u - 1)^2} \right), \\
\phi_{F,2} : F &\rightarrow E & (u, v) &\mapsto (u^2, v), \\
\phi_{F,3} : F &\rightarrow E & (u, v) &\mapsto \left( \frac{2u}{u^3 - 1}, \frac{v(2u^3 + 1)}{(u^3 - 1)^2} \right), \\
\phi_{G,3} : G &\rightarrow E & (u, v) &\mapsto \left( \frac{4\sqrt{2}(u + 3\sqrt{2} + 4)^2(u + 2\sqrt{2} + 4)}{f}, \frac{(4 + 4\sqrt{2})v}{f^2} \right), \\
&& \text{ただし, } f &:= (u + \sqrt{2})(u + 4\sqrt{2} + 1)(u + 3\sqrt{2} + 2), \\
\phi_{G,4} : G &\rightarrow E & (u, v) &\mapsto \left( \frac{u^4 + (1 + 4\sqrt{2})u^2 + 2}{g}, \frac{vu}{g^2} \right), \\
&& \text{ただし, } g &:= u^4 + (1 + 2\sqrt{2})u^2 + (4 + \sqrt{2})
\end{aligned}$$

をとる. また, 自己同型写像

$$\begin{aligned}
\gamma : E &\rightarrow E & (x, y) &\mapsto (\omega x, -y), \\
h_F : F &\rightarrow F & (u, v) &\mapsto \left( \frac{2\sqrt{2}u + 4}{u + 2\sqrt{2}}, \frac{v}{(u + 2\sqrt{2})^3} \right), \\
h'_F : F &\rightarrow F & (u, v) &\mapsto \left( \frac{2\sqrt{2}u + 1}{u + 3\sqrt{2}}, \frac{v}{(u + 3\sqrt{2})^3} \right), \\
h_G : G &\rightarrow G & (u, v) &\mapsto \left( \frac{2u + 3}{u + 1}, \frac{4v}{(u + 1)^6} \right)
\end{aligned}$$

を考える. また,  $\tau$  を  $(P, Q) \mapsto (Q, \iota_E(P))$  で与えられる  $A$  の自己同型写像とする.  $A$  上の曲線  $\Gamma$  に対し,  $\Gamma$  を 2 等分点  $A_2$  によって translate した曲線全体の集合を  $\mathcal{T}(\Gamma)$  と書く.

$$\begin{aligned}
\mathcal{L}_{01} &:= \mathcal{T}(\Gamma[(\phi_{F,2}, \phi_{F,2} \circ h_F)]), \\
\mathcal{L}_{02} &:= \mathcal{T}(\Gamma[(\phi_{F,3}, \phi_{F,3} \circ h'_F)]), \\
\mathcal{L}_{10,(4,3)} &:= \mathcal{T}(\Gamma[(\phi_{G,4}, \phi_{G,3})]), \\
\mathcal{L}_{10,(4,4)} &:= \mathcal{T}(\Gamma[(\gamma^2 \circ \phi_{G,4}, \gamma \circ \phi_{G,4} \circ h_G)]), \\
\mathcal{L}_{10} &:= \mathcal{L}_{10,(4,3)} \cup \tau(\mathcal{L}_{10,(4,3)}) \cup \mathcal{L}_{10,(4,4)} \cup \tau(\mathcal{L}_{10,(4,4)}), \\
\mathcal{L}_{11,(1,2)} &:= \mathcal{T}(\Gamma[(\gamma^2, \gamma^2 \circ \phi_{E,2})]), \\
\mathcal{L}_{11,(2,2)} &:= \mathcal{T}(\Gamma[(\phi_{E,2} \circ \gamma, \gamma \circ \phi_{E,2})]), \\
\mathcal{L}_{11} &:= \mathcal{L}_{11,(1,2)} \cup \tau(\mathcal{L}_{11,(1,2)}) \cup \mathcal{L}_{11,(2,2)} \cup \tau(\mathcal{L}_{11,(2,2)}), \\
\mathcal{L}_{12} &:= \mathcal{T}(B_1) \cup \mathcal{T}(B_2) \cup \mathcal{T}(B_4) \cup \mathcal{T}(\Gamma[(\text{id}, \gamma^2)]).
\end{aligned}$$

$A$  上の曲線群  $\mathcal{L}_{\nu i}$  を  $Km(A)$  上に移した曲線群を  $\mathcal{S}_{\nu i}$  と書く. さらに,  $A/\iota$  の特異点解消から得られる 16 個の例外曲線の集合を  $\mathcal{S}_{00}$  とおく. このとき, 次の定理を得る.

**定理 4.1.**  $Km(A)$  上に, 16 個の互いに交わらない非特異有理曲線からなる 6 個の集合

$$\mathcal{S}_{00}, \mathcal{S}_{01}, \mathcal{S}_{02}, \mathcal{S}_{10}, \mathcal{S}_{11}, \mathcal{S}_{12}$$

が存在して, 次の性質を持つ:

- (a)  $i \neq j$  ならば,  $\nu = 0, 1$  に対し,  $\mathcal{S}_{\nu i}$  と  $\mathcal{S}_{\nu j}$  は  $(16_6)$ -configuration をなす.
- (b)  $i = 0, 1, 2$  に対し, 集合  $\mathcal{S}_{0i}$  と  $\mathcal{S}_{1i}$  は  $(16_{12})$ -configuration をなす.
- (c)  $i \neq j$  ならば,  $\mathcal{S}_{0i}$  と  $\mathcal{S}_{1j}$  は  $(16_4)$ -configuration をなす.

## 5 格子理論との関係

$L$  を index  $(1, 25)$  の even unimodular lattice とする. このような lattice は unique であり,  $\Lambda$  を Leech lattice,  $H$  を rank 2 の hyperbolic lattice とするとき,

$$\Lambda \cong H \oplus \Lambda$$

となることが知られている. dual lattice  $L^\vee := \text{Hom}(L, \mathbf{Z})$  を, extended symmetric bilinear form をもつ  $L \otimes \mathbf{Q}$  の lattice とみなす. また, cone

$$\{x \in L \otimes \mathbf{R} \mid x^2 > 0\}.$$

は 2 つの連結成分からなるが, その一方を positive cone と呼び,  $\mathcal{P}_L$  と書く.

$$\mathcal{R}_L = \{v \in L \mid v^2 = -2\}$$

とおく.  $\mathcal{R}_L$  の元  $r$  は  $L$  の reflection

$$S_r : x \mapsto x + \langle x, r \rangle r$$

を定義する.  $W(L)$  を  $\{s_r \mid r \in \mathcal{R}_L\}$  によって生成される群とする. hyperplanes の族  $\mathcal{R}_L^* = \{(v)^\perp \mid v \in \mathcal{R}_L\}$  を考え,

$$\mathcal{P}_L \setminus \bigcup_{v \in \mathcal{R}_L} (v)^\perp$$

の connected component の  $\mathcal{P}_L$  での closure を  $\mathcal{R}_L^*$ -chamber という. Weyl 群  $W(L)$  が  $\mathcal{P}_L$  の上に作用するが,  $\mathcal{R}_L^*$ -chamber はその基本領域である. index  $(1, 25)$  の even unimodular lattice  $L$  の  $\mathcal{R}_L^*$ -chamber を Conway chamber と呼ぶ.

$w \in L$  を  $w^2 = 0$  を満たす 0 ではない primitive vector とする.  $w$  が次の 2 条件を満たすとき Weyl vector と呼ぶ.

- (i)  $w$  は  $L \otimes \mathbf{R}$  における  $\mathcal{P}_L$  の閉包に含まれる.



(ii)  $\langle w \rangle^\perp / \langle w \rangle \cong \Lambda$ .

Weyl vector  $w$  に対し,

$$\Delta(w) := \{r \in \mathcal{P}_L \mid (r, w) = 1\}.$$

とおく. このとき, 次が成り立つ (Conway [2], Conway-Sloane [3]).

**定理 5.1.**  $w$  を Weyl vector とすれば,

$$\mathcal{D}(w) := \{x \in \mathcal{P}_L \mid (r, x) \geq 0 \ r \in \Delta(w)\}$$

は Conway chamber である. 逆に, Conway chamber  $\mathcal{D}$  に対し,  $\mathcal{D} = \mathcal{D}(w)$  となるような Weyl vector  $w$  がただ一つ存在する.

$S = \text{NS}(Km(A))$  とおく. lattice  $S$  についても, positive cone  $\mathcal{P}_S$ ,  $\mathcal{R}_S$ ,  $\mathcal{R}_S^*$ -chamber などを lattice  $L$  の場合と同様に定義する. 標数 5 のとき,  $S$  の  $L$  への primitive embedding でその直交補空間  $R$  が次の 2 条件を満たすものが存在する:  $R$  上の discriminant quadratic form  $q_R$

$$\begin{aligned} q_R: \quad R^\vee / R &\rightarrow \mathbf{Q}/2\mathbf{Z} \\ x \bmod R &\mapsto x^2 \bmod 2\mathbf{Z} \end{aligned}$$

に対し

(i)  $R$  は Leech lattice に埋め込みを持たない.

(ii) 自然な写像  $O(R) \rightarrow O(q_R)$  は全射になる.

この埋め込みは  $O(L)$  の作用を modulo にして一意的である.  $\mathcal{P}_S$ ,  $\mathcal{P}_L$  を  $Km(A)$  の ample cone を含む方の連結成分とする.

$$\text{NC}(Km(A)) = \{C \in \text{NS}(A) \mid C^2 > 0, (C, C') \geq 0 \text{ for any curve } C' > 0\}$$

とおけば,  $\text{NC}(Km(A))$  は  $S$  の  $\mathcal{R}_S^*$ -chamber である (Rudakov-Shafarevich [11]). また,  $x \in L \otimes \mathbf{R}$  に対し,

$$x \mapsto x_S \quad x \mapsto x_R,$$

を, それぞれ  $S \otimes \mathbf{R}$ ,  $R \otimes \mathbf{R}$  への射影とすると,  $v \in L$  に対し,  $v_S \in S^\vee$ ,  $v_R \in R^\vee$  となる.

$$\mathcal{R}_{L|S} = \{r_S \mid r \in \mathcal{R}_L, (r_S, r_S) < 0\}, \quad \mathcal{R}_{L|S}^* = \{(r_S)^\perp \mid r_S \in \mathcal{R}_{L|S}\}$$

とおく.  $\mathcal{R}_{L|S}^*$  は  $S$  の positive cone  $\mathcal{P}_S$  で局所有限になる. Conway chamber  $\mathcal{D}$  が  $S$ -nondegenerate とは,  $\mathcal{D} \cap \mathcal{P}_S$  が  $\mathcal{P}_S$  の空ではない開集合を含むということである.  $\mathcal{D}$  が  $S$ -nondegenerate Conway chamber ならば,  $D := \mathcal{D} \cap \mathcal{P}_S$  は  $\mathcal{P}_S$  の  $\mathcal{R}_{L|S}^*$ -chamber となる. このとき,  $D$  を induced chamber という.  $\mathcal{P}_L$

は Conway chambers で覆われるから,  $\mathcal{P}_S$  は induced chambers で覆われる.  $\mathcal{R}_S$  は  $\mathcal{R}_{L|S}$  の部分集合だから,  $\mathcal{R}_S^*$ -chamber は induced chambers の合併となる.

$\mathcal{P}_S$  の chamber  $\text{NC}(Km(A))$  は induced chambers の合併となるが, その中に次のような 3 つの induced chamber が存在する.

$D_0$  : 252 個の  $(-2)$ -vectors を walls を作るベクトルに含む.

$D_1$  : 168 個の  $(-2)$ -vectors を walls を作るベクトルに含む.

$D_2$  : 96 個の  $(-2)$ -vectors を walls を作るベクトルに含む.

$D_0$  と  $D_1$  は隣り合っており, 共通の  $(-2)$ -vectors は 126 個.  $D_0$  と  $D_2$  も隣り合っており, 共通の  $(-2)$ -vectors は 48 個. また,  $D_0, D_1, D_2$  の  $(-2)$ -vector 以外の walls を作るベクトルもすべて決定できている. また,  $D_2$  の 96 個の  $(-2)$ -vectors のなす配置は, 前節で幾何学的に構成された smooth rational curves の配置に対応している.  $D_0$  の walls として現れる 252 個の  $(-2)$ -vectors は次の様な幾何学的意味を持つ.  $C_F$  を射影平面  $\mathbf{P}^2$  の 6 次の Fermat 曲線とし,  $\pi_F : X \rightarrow \mathbf{P}^2$  を  $C_F$  で分岐する  $\mathbf{P}^2$  の double covering とする. このとき,  $X$  は超特殊 K3 曲面になる.  $C_F$  の上には 126 個の  $\mathbf{F}_{25}$ -有理点が存在する. その各点における  $C_F$  の tangent line をとれば, 126 個の line が得られる. 各 line を  $\pi$  で引き戻せば, 1 点で 3 重に接する 2 個の smooth rational curves が得られ, したがって, 126 個の line から  $X$  上の 256 個の smooth rational curves を得る. これらが  $D_0$  の walls として出てくる 256 個の  $(-2)$ -vectors に対応している.

## 参考文献

- [1] W. Barth and I. Nieto, Abelian surfaces of type (1, 3) and quartic surfaces with 16 skew lines,
- [2] J. H. Conway, The automorphism group of the 26-dimensional even unimodular Lorentzian lattice, J. Algebra 80 (1983), 159–163.
- [3] J. H. Conway and N. J. A. Sloane. Lorentzian forms for the Leech lattice. *Bull. Amer. Math. Soc. (N.S.)*, 6(2):215–217, 1982.
- [4] I. Dolgachev, Abstract configurations in algebraic geometry, Proc. of The Fano Conference, Univ. of Torino, 2004, 423–462
- [5] I. Dolgachev and S. Kondō, A supersingular K3 surface in characteristic 2 and the Leech lattice, IMRN 2003, (2003), 1–23.
- [6] T. Katsura, On the discriminants of intersection form on Néron-Severi group, in "Algebraic Geometry and Commutative Algebra in honor of Masayoshi Nagata", Kinokuniya Publ., (1987), 183–201.

- [7] T. Katsura and S. Kondo, A note on the supersingular K3 surface with Artin invariant 1 in characteristic 2, In "Geometry and Arithmetic" (C. Faber, G. Farkas, R. de Jong, eds.), EMS, 2012, 243-255.
- [8] T. Katsura and S. Kondo, The supersingular K3 surface with Artin invariant 1 in characteristic 3, J. Algebra, 352 (2012), 299-321.
- [9] T. Katsura, S. Kondo and I. Shimada, On the supersingular K3 surface in characteristic 5 with Artin invariant 1, arXiv:1312.0687.
- [10] I. Shimada, Rational double points on supersingular K3 surfaces, Math. Comp. 73 (2004), 1989–2017 (electronic) .
- [11] A. N. Rudakov and I. R. Shafarevich. Surfaces of type  $K3$  over fields of finite characteristic. In *Current problems in mathematics, Vol. 18*, pages 115–207. Akad. Nauk SSSR, Vsesoyuz. Inst. Nauchn. i Tekhn. Informatsii, Moscow, 1981. Reprinted in I. R. Shafarevich, Collected Mathematical Papers, Springer-Verlag, Berlin, 1989, pp. 657–714.
- [12] M. Traynard, Sur les fonctions theta de deux variables et les surfaces hyperelliptiques, Annales de l'Ecole Normale Supérieure, 1907, 77-177 .

T. Katsura:  
 Faculty of Science and Engineering,  
 Hosei University,  
 Koganei-shi,  
 Tokyo,  
 184-8584 JAPAN  
 email: toshiyuki.katsura.tk@hosei.ac.jp